

**GPS wird im Alltag viel genutzt –
aber wie funktioniert es eigentlich?**

Facharbeit in Mathematik/Physik
zuständige Lehrkraft: Lukas Reinmund

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| 1 Einleitung..... | 3 |
| 2 Geschichte..... | 3 |
| 3 Grundprinzip..... | 4 |
| 3.1 Funksignal..... | 4 |
| 3.2 Positionsbestimmung im zweidimensionalen Raum..... | 6 |
| 3.2.1 Angleichen der Uhren..... | 6 |
| 3.3 Positionsbestimmung im dreidimensionalen Raum und sich dadurch ergebende Satellitenbahnen..... | 7 |
| 3.4 Messfehler und DGPS..... | 8 |
| 4 Mathematische Berechnung..... | 9 |
| 5 Alternative Satellitennavigationssysteme..... | 12 |
| 6 Anwendungsbeispiele..... | 12 |
| 7 Fazit..... | 13 |
| Literaturverzeichnis..... | 14 |
| Abbildungsverzeichnis..... | 14 |
| Versicherung der selbstständigen Erarbeitung und Anfertigung der Facharbeit..... | 16 |

1 Einleitung

Navigation ist seit dem Altertum ein wichtiges Thema. Die Menschen orientierten sich damals noch an dem Sternenstand. Der Kompass und weitere Techniken, wie der Sextant, folgten später. Heute haben wir unser GPS zur Verfügung. Dieses verwenden wir mit unseren Handys beim Navigieren, oder das Flugzeug auf dem Weg nach Mallorca oder wir haben GPS bei unserer letzten Geocaching-Tour benutzt. Mit anderen Worten findet das Satellitennavigationssystem beinahe überall Verwendung. Jedoch nur wenige kennen die Hintergründe, warum oder unter welchen Umständen es entwickelt wurde. Nur eine Handvoll Personen kann den vollständigen Namen von GPS benennen. Und nur ein Bruchteil weiß, wie es funktioniert und wie unsere Technik ein solches Werk hervorbringen konnte. Deshalb möchte ich in dieser Arbeit die Lücke etwas schließen. Zuerst reiße ich die Geschichte an, wie GPS entwickelt wurde. Hauptsächlich zeige ich die Grundprinzipien der Satellitennavigation und die mathematische Berechnung, welche dahinter steckt.

2 Geschichte

Am 04. Oktober im Jahre 1957 nahm unser heutiges GPS oder offiziell NAVSTAR GPS („Navigational Satellite Timing and Ranging – Global Positioning System“¹) seinen Anfang². In diesen Tagen des Kalten Kriegs hat die UdSSR als Erstes einen Satelliten in den Orbit befördert. ‚Sputnik 1‘ war der Satellit, welcher die USA ausspionierte. Er konnte noch keine Informationen per Funk übertragen, jedoch warf er Filme in speziellen Kapsel ab, welche die Informationen enthielten. Die USA waren geschockt von den Fähigkeiten der russischen Ingenieure und arbeiteten selbst an einem Satellitensystem. Im Jahre 1964 kam das neue US-amerikanische Satellitenpositionierungssystem ‚Transit‘ zum Einsatz. Es brachte schon einige Vorteile im Vergleich zu dem russischen Modell, hatte jedoch noch ein paar Mängel. Das Transit-System konnte keine Positionen in der Dritten Dimension (die Höhe) bestimmen, und bei bewegten Objekten hatte ‚Transit‘ auch noch seine Schwierigkeiten. Zudem war es für militärische Zwecke noch immer nicht genau genug, um voll eingesetzt zu werden. Jedoch war es für die Raketen des amerikanischen Militärs ein willkommener Vorteil. Zudem konnte Transit seine Informationen per Funksignal versenden³.

In den kommenden Jahren wurde Transit weiterentwickelt und es entstanden zwei verschiedenen Systeme, das eine von der US Navy und das andere von der US Air Force. Aufgrund von zu hohen Kosten wurden die zwei Satellitensysteme

1 Vgl. Albrecht, 2022, S. 22

2 Vgl. Deutsches Spionagemuseum, Stand: 13.08.2023

3 Vgl. Kumm, 1993, S. 26

zusammengelegt. Die Teamarbeit führte zu einem gemeinsamen Entwurf. Im Jahre 1977 am 27. Juni startete ein erster Testsatellit und ein Jahr später wurde der erste richtige GPS-Satellit in den Orbit geschossen⁴.

Das System sollte bis zum Jahre 1989/1990 vollständig aufgebaut werden. Es kam jedoch zu erheblichen Verzögerungen, unter anderem aufgrund einer Explosion der Raumfähre ‚Challenger‘. In dieser Zeit wurde auch in Erwägung gezogen, das Projekt aufzugeben, da sich erhebliche finanzielle Probleme herausstellten. Aus diesem Grund wurde die Planung mehrfach verändert, beispielsweise hinsichtlich der Anzahl und Anordnung der Satelliten⁵.

Trotz der vielen Probleme schafften es die USA, das System aufzubauen. Jedoch stand es lange Zeit nur dem amerikanischen Militär zur Verfügung⁶. Im Jahre 1983 kam ein koreanisches Flugzeug von seinem Kurs ab⁷. Es geriet versehentlich auf sowjetisches Gebiet und wurde abgeschossen. Der Präsident der Vereinigten Staaten beschloss wegen hauptsächlich diesem Ereignis, GPS für die Zivilbevölkerung bereitzustellen. Als das System 10 Jahre später in Betrieb genommen werden konnte, wurden der Bevölkerung noch immer nicht die vollen Kapazitäten zur Verfügung gestellt⁸. Das GPS-System wurde mit einer Genauigkeit von unter 10 m entwickelt. Die Nutzer konnten jedoch nur mit einer Genauigkeit von bis zu 100 m rechnen. Die USA befürchteten, dass das System gegen das eigene Land verwendet werden könnte und setzte eine künstliche Verfälschung (Selective Available/SA = eingeschränkte Verfügbarkeit) ein, die diese Abweichung bis 100 m erreichen konnte. Zu militärischen Zwecken war das System zu ungenau, jedoch konnten Flugzeuge oder Schiffe damit navigieren. Nun konnte es nicht mehr zu einer solchen Tragödie kommen, wie beim Flugzeug, welches vom Kurs abgekommen ist und abgeschossen wurde. Erst ab dem 02. Mai 2000 läutete die Geburtsstunde des heutigen, allgegenwärtigen GPS. Die USA hatten sich entschlossen, die SA Funktion bis auf Weiteres nicht mehr zu einzusetzen. In den Satelliten ist diese Technik noch immer verbaut⁹. Die USA nahmen sich bis 2007 das Recht, die SA-Funktion jederzeit wiederzuverwenden¹⁰.

3 Grundprinzip

3.1 Funksignal

Vielleicht hat der ein oder andere schon die Erfahrung gemacht, dass GPS lange laden musste. Zu einem ungünstigen Zeitpunkt kann das bis zu 12,5 Minuten

4 Vgl. Kumm, 1993, S. 26

5 Vgl. Kumm, 1993, S. 26

6 Vgl. Kumm, 1993, S. 31

7 Vgl. Albrecht, 2022, S. 24

8 Vgl. Eth Zürich, Stand 14.08.2023, S. 3

9 Vgl. Schmidt, 2019, S. 525

10 Vgl. Albrecht, 2022, S. 37

dauern¹¹. Um zu verstehen, weshalb das der Fall ist, muss man einen tieferen Blick in die Materie werfen.

Der Satellit sendet kontinuierlich ein elektromagnetisches Signal. Dieses breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit kugelförmig in alle Richtungen aus¹². Das Signal beinhaltet im Prinzip folgende Inhalte.

Anfangs meldet der Satellit immer seinen Namen bzw. seine Kennung.

Ganz wichtig sind noch die Ephemeriden. Das ist die Bezeichnung für die exakten Positionswerte des Satelliten¹³.

Zu der Position wird die GPS-Zeit vom Lossenden des Signals verschickt. Die ‚GPS-Time‘ startete im Jahre 1980 am 6. Januar, dort entsprach die GPS-Time der UTC (Universal Time Coordinated = Weltzeit). Mit der Zeit wurden bei der UTC Schaltsekunden eingefügt und es kam zu einer Verschiebung¹⁴.

Einsteins Relativitätstheorie besagt, dass Uhren, welche von der Gravitationskraft weiter entfernt sind, schneller gehen, als eine baugleiche Uhr auf der Erde. Das bedeutet, dass die hochgenauen Atomuhren in den Satelliten (in der Regel sind es 4 Stück) mit der Zeit falsch gehen und korrigiert werden müssen. Da der Satellit seine Atomuhren nicht einfach verstellen kann, werden einem die Korrekturdaten zugesendet¹⁵.

Die letzte Komponente ist der ‚Almanach‘: Dieser beinhaltet grobe Positionswerte und Bahnen-Daten aller aktiven GPS-Satelliten¹⁶.

Diese ganzen Informationen sendet der Satellit in einem regelmäßigen Zyklus, welcher sich alle 12,5 Minuten wiederholt. Um eine Position zu bestimmen, müssen alle Daten übermittelt worden sein. Der Almanach hat einen zu großen Umfang, um am Stück versendet zu werden. Deshalb wird er in vielen kleinen Paketen Stück um Stück verschickt. Nach 12,5 Minuten ist der vollständige Almanach beim Benutzer angekommen.

Erst mit dem ganzen Almanach können die GPS-Berechnungen vorgenommen werden. Um die Wartezeit zu verkürzen, lädt sich der Empfänger die Daten aus dem Internet wenn möglich herunter. Hier gibt es eine höhere Übertragungsrate. Der GPS-Satellit ist nur 50 Bits/s schnell. Die Datenmenge eines Zyklus umfasst 37500 Bits. Deswegen dauert ein Zyklus 12,5 Minuten. Wenn der Almanach erst einmal angekommen ist, geht die Positionsbestimmung schnell, da die Ephemeriden alle paar Sekunden übermittelt werden¹⁷.

11 Vgl. Kumm, 1993, S. 46

12 Vgl. Albrecht, 2022, S. 30

13 Vgl. Kumm, 1993, S. 46

14 Vgl. Albrecht, 2022, S. 50

15 Vgl. Albrecht, 2022, S. 299

16 Vgl. Kumm, 1993, S. 46

17 Vgl. Albrecht, 2022, S. 53, 56f

3.2 Positionsbestimmung im zweidimensionalen Raum



Abbildung 1: Satelliten mit einer 5-Sekundenbahn¹⁸; Abbildung 2: Satelliten mit einer 5- und 3-Sekundenbahn¹⁹

Zur besseren Anschaulichkeit wird hier zuerst nur der zweidimensionale Raum verwendet und wir gehen davon aus, dass das Signal 5 Sekunden braucht, um vom Satelliten zum Empfänger zu gelangen. Das bedeutet, dass wir uns auf dem grünen Kreis (Bild links) von

$$\text{Zeit} \cdot \text{Geschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit)} = \text{Entfernung}$$

befinden. Um unsere Position weiter einzugrenzen, nehmen wir noch einen zweiten Satelliten dazu.

Der zweite Kreis zeigt die Strecke, welche in 3 Sekunden (vom Satelliten zum Empfänger) von dem Signal zurückgelegt wird.

Folglich befinden wir uns auf beiden Kreislinien, also an einem der zwei Schnittpunkte. Der Punkt außerhalb der Erdatmosphäre lässt sich ausschließen, jedoch möchte man erstens nur *eine* ganz sichere Position haben. Zweitens ist in eigentlich keinem Endgerät eine Atomuhr, welche die Zeit ganz exakt anzeigt.

3.2.1 Angleichen der Uhren

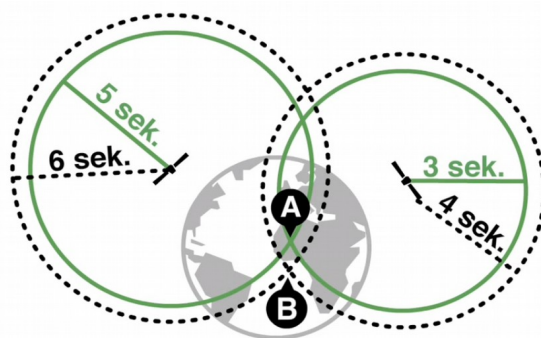


Abbildung 3: Satelliten auf einer 3/5-Sekundenbahn, bzw. Messfehler auf einer 4/6-Sekundenbahn²⁰

¹⁸ Vgl. RedaktionErde, Stand: 25.08.2023, 01:36 Minuten

¹⁹ Vgl. RedaktionErde, Stand: 25.08.2023, 01:41 Minuten

²⁰ Vgl. RedaktionErde, Stand: 25.08.2023, 02:50 Minuten

Bei einem kleinen Messfehler von einer Hundertstelsekunde hat das schon fatale Auswirkungen. Man würde sich laut Navigationsgerät in unserem Beispiel an Position B anstatt A befinden.

Bei einer Hundertstelsekunde zeigt das Navigationsgerät eine 3000 km entfernte Position an, da folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \text{Zeit} \cdot \text{Geschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit)} &= \text{Entfernung} \\ 0,01 \text{ s} \cdot 300\,000 \text{ km/s} &= 3\,000 \text{ km} \end{aligned}$$

Damit wäre das Navigationsgerät völlig unbrauchbar. Im Bild erkennt man eine solche Abweichung an der gestrichelten Linie und der dadurch entstandenen Position B.

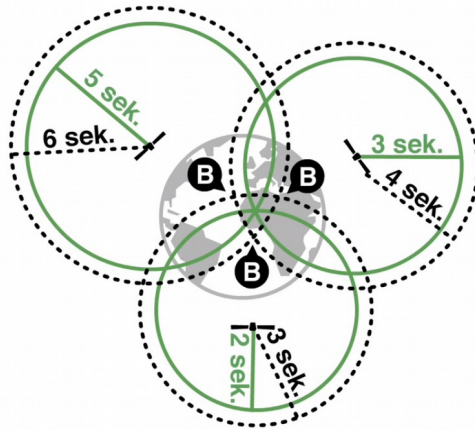


Abbildung 4: Satelliten mit einer 2/3/5-Sekundenbahn, bzw. Messfehler auf 3/4/6-Sekundenbahn, Punkt B Scheinpositionen²¹

Um das Problem zu beheben, holt man sich noch einen weiteren Satelliten dazu. Nun gibt es drei mögliche Positionen. Innerhalb dieser drei Punkte befindet sich unser richtiger Standort. Um den Standort möglichst exakt zu bestimmen, gleicht die Software des Empfängers die Uhr des Endgeräts immer mehr an die exakte Atomuhrzeit an. Das Dreieck aus den drei möglichen Positionen wird dadurch immer kleiner, sodass am Ende ein Punkt sicher als Position bestimmt ist²².

3.3 Positionsbestimmung im dreidimensionalen Raum und sich dadurch ergebende Satellitenbahnen

Wenn man dieses Prinzip der Ortung ins Dreidimensionale überträgt, benötigt man noch einen vierten Satelliten, um die Position im Raum zu bestimmen. Diese Satelliten müssen immer ‚sichtbar‘ sein. Das heißt, mindestens vier Satelliten müssen in Funkreichweite sein und dadurch über dem Horizont stehen. Um das zu gewährleisten, benötigt man mindestens 24 Satelliten im Orbit. Diese fliegen in sechs Bahnen in einer Höhe von ca. 20200 km über der Erdoberfläche. Zusätzlich gibt es noch ein paar Ersatzsatelliten, um die Ortung immer sicher zu gewährleisten²³.

²¹ Vgl. RedaktionErde, Stand: 25.08.2023, 03:30 Minuten

²² Vgl. RedaktionErde, Stand: 25.08.2023

²³ Vgl. Albrecht, 2022, S. 121

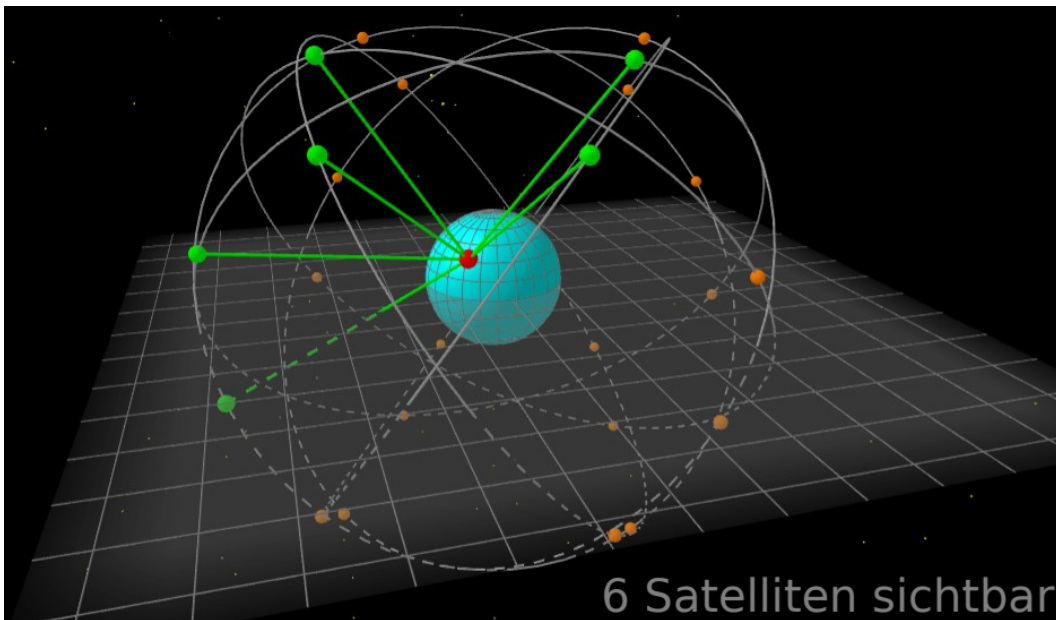


Abbildung 5: Die grünen Kugeln stellen die sichtbaren Satelliten dar, die orangefarbenen die Satelliten, welche hinter dem Horizont stehen²⁴

3.4 Messfehler und DGPS

Das Funksignal hat einen weiten Weg vom Satelliten bis zum Empfänger. Zwischendurch wird das Signal durch verschiedene Faktoren beeinflusst. Beispielsweise gibt es in Teilen der Atmosphäre eine Signalverzögerung. Zudem kann das Signal von großen spiegelnden Flächen reflektiert werden, sodass genauso eine fehlerhafte Laufzeitmessung entsteht.

Diese natürlichen Messfehler möchte man ausmerzen. Um dennoch eine relativ genaue Position zu erhalten, wurde ‚Differential GPS‘ (DGPS) entwickelt. Hier hat man das zusätzliche Segment ‚Bodenstationen‘ mit bekannten Positionen genommen. Dort hat man mit GPS die Position bestimmt. Die GPS-Ortung gab an, dass der Standort an einem anderen Ort lag, als es tatsächlich der Fall war. Nun konnte man sich die Abweichung des Signals ansehen und konnte mit dieser Differenz seine eigene errechnete Position korrigieren²⁵.

Heute verwendet man noch immer die Technik der drei Segmente. Erstens das ‚Space Segment‘, also der Satellit im Orbit. Dann das ‚Control Segment‘, damit meint man die Bodenstationen. Und schließlich das ‚User Segment‘. Das ist der Empfänger, beispielsweise das Handy oder ein Flugzeug²⁶.

²⁴ Katharinen Gymnasium, Stand 21.08.2023

²⁵ Vgl. Albrecht, 2022, S. 36

²⁶ Vgl. Albrecht, 2022, S. 38

4 Mathematische Berechnung

Wir wissen inzwischen, wie das Grundprinzip funktioniert, jedoch wissen wir noch immer nicht die genauen Rechenschritte. Da die Berechnung mithilfe der Software des Empfängergeräts stattfindet, kann das Verfahren etwas variieren. Hier zeige ich einen beispielhaften Rechenweg.

Für die Berechnung der Position wird ein kartesisches, dreidimensionales Koordinatensystem verwendet. Dabei befindet sich der Erdmittelpunkt im Ursprung der drei Achsen. Unsere Position befindet sich bei dem Punkt ‚Anwender‘.

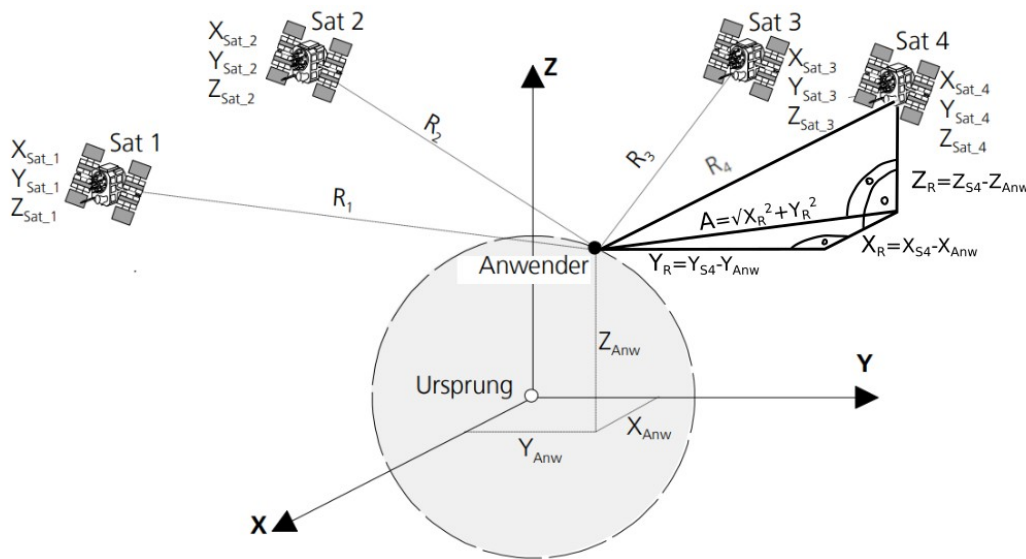


Abbildung 6: Erde im Koordinatensystem und vier Satelliten zur Positionsbestimmung ²⁷

Prinzipiell wollen wir die Entfernung R von den Satelliten zu unserem Anwender oder Empfänger wissen. Dazu rechnen wir die Differenz zwischen den Koordinaten des Satelliten und dem Anwender:

$$X_S - X_{Anw} = X_R \quad (1)$$

Wenn man dies mit allen drei Koordinaten gemacht hat, kann man mit dem Satz des Pythagoras die Entfernung R errechnen. Es gilt $a^2 + b^2 = c^2$ bzw. im Raum und mit den XYZ-Koordinaten:

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= R^2 \quad \text{bzw.} \\ X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2 &= R^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Dies gilt, da die diagonale A von X_R und Y_R folgendem entspricht:

$$\begin{aligned} X_R^2 + Y_R^2 &= A^2 \\ \sqrt{X_R^2 + Y_R^2} &= A \end{aligned} \quad (3)$$

Ersetzt man A im Satz des Pythagoras $A^2 + Z^2 = R^2$, ergibt sich:

²⁷ Nach Ublox, Stand 23.08.2023, S. 82

$$\begin{aligned} A^2 + z^2 &= R^2 \\ (\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 &= R^2 \quad (4) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \end{aligned}$$

Wenn man dann die Formel der einzelnen Koordinaten (siehe (1)) einsetzt, ergibt sich:

$$(x_S - x_{Anw})^2 + (y_S - y_{Anw})^2 + (z_S - z_{Anw})^2 = R^2 \quad (5)$$

Sobald man die Koordinaten des Satelliten eingesetzt hat, erhält man eine Gleichung mit drei Unbekannten (x_{Anw} , y_{Anw} und z_{Anw}). Damit man eine Gleichung mit drei Unbekannten lösen kann, benötigen wir drei Gleichungen, also drei Satelliten. Wenn wir nicht davon ausgehen können, dass die Empfängeruhr genau exakt geht haben wir vier Unbekannte (die vierte ist die Zeit t) und benötigen vier Gleichungen und vier Satelliten.

Zur besseren Anschaulichkeit rechne ich in meinem Beispiel nur noch im zweidimensionalen Raum, weswegen ich drei Satelliten benötige. Also lautet meine Gleichung nun:

$$(x_S - x_{Anw})^2 + (y_S - y_{Anw})^2 = R^2 \quad (7)$$

Dabei entspricht R :

$R = c \cdot (t_S - t_{Anw})$ (8) c entspricht der (Licht-)Geschwindigkeit; t entspricht dem Zeitpunkt des Lossendens bzw. Eintreffen des Signals, also letztendlich der Zeitspanne

Setzt man diese Formel (8) in die Formel (7) ergibt sich bei den Satelliten:

$$\begin{aligned} (x_S - x_{Anw})^2 + (y_S - y_{Anw})^2 &= c^2 (t_S - t_{Anw})^2 \\ (x_S - x_{Anw})^2 + (y_S - y_{Anw})^2 - c^2 (t_S - t_{Anw})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

bzw.

$$\begin{aligned} (x_{S1} - x_{Anw})^2 + (y_{S1} - y_{Anw})^2 - c^2 (t_{S1} - t_{Anw})^2 &= 0 \\ (x_{S2} - x_{Anw})^2 + (y_{S2} - y_{Anw})^2 - c^2 (t_{S2} - t_{Anw})^2 &= 0 \quad (10); (11); (12) \\ (x_{S3} - x_{Anw})^2 + (y_{S3} - y_{Anw})^2 - c^2 (t_{S3} - t_{Anw})^2 &= 0 \end{aligned}$$

Um die Gleichungen mit den drei Unbekannten x_{Anw} , y_{Anw} und t_{Anw} zu vereinfachen, subtrahieren wir die Gleichungen für Satellit 1 mit der vom Satellit 2.

$$\begin{aligned} (x_{S1} - x_{Anw})^2 - (x_{S2} - x_{Anw})^2 + (y_{S1} - y_{Anw})^2 - (y_{S2} - y_{Anw})^2 \\ - c^2 (t_{S1} - t_{Anw})^2 - (-c^2 (t_{S2} - t_{Anw})^2) = 0 \end{aligned} \quad (13) \text{ bei der}$$

$$\begin{aligned} x_{S1}^2 - 2x_{S1}x_{Anw} + x_{Anw}^2 - x_{S2}^2 + 2x_{S2}x_{Anw} - x_{Anw}^2 \\ + y_{S1}^2 - 2y_{S1}y_{Anw} + y_{Anw}^2 - y_{S2}^2 + 2y_{S2}y_{Anw} - y_{Anw}^2 \\ - c^2 (t_{S1}^2 - 2t_{S1}t_{Anw} + t_{Anw}^2 - t_{S2}^2 + 2t_{S2}t_{Anw} - t_{Anw}^2) = 0 \end{aligned}$$

unteren Gleichung wurden die Binomischen-Formeln ausgeschrieben

Zusammengefasst ergibt das:

$$2x_{\text{Anw}}(x_{S2} - x_{S1}) + 2y_{\text{Anw}}(y_{S2} - y_{S1}) + 2c^2 t_{\text{Anw}}(t_{S1} - t_{S2}) + x_{S1}^2 - x_{S2}^2 + y_{S1}^2 - y_{S2}^2 + c^2(t_{S2}^2 - t_{S1}^2) = 0 \quad (14)$$

Dieses Prinzip, der Subtraktion kann man auch für die Formeln der Satelliten 2 und 3 machen. Dadurch haben wir das Quadrat eliminiert und erhalten ein lineares Gleichungssystem.

Zur besseren Vereinfachung der vielen Variablen verwende ich zukünftig folgende Beispielwerte, um nicht eine noch längere, unübersichtlichere Gleichung zu erhalten:

$$\text{Satellit 1: } \begin{bmatrix} x_{S1} \\ y_{S1} \\ t_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \text{Satellit 2: } \begin{bmatrix} x_{S2} \\ y_{S2} \\ t_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}; \quad \text{Satellit 3: } \begin{bmatrix} x_{S3} \\ y_{S3} \\ t_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$c = 1$ c entspricht der Geschwindigkeit

Als nächster Schritt werden die Werte in die Formel (14) eingesetzt und es ergibt sich letztendlich:

$$18x_{\text{Anw}} - 10y_{\text{Anw}} + 8t_{\text{Anw}} - 56 = 0 \quad (15)$$

Wie schon erwähnt wurde, kann man das Prinzip der Subtraktion mehrerer Formeln verwenden. Dies funktioniert genauso, wie bei den vorherigen Rechnungen (11)-(12) gezeigt. Auch hier setze ich wieder meine Werte ein. Diesmal von den Satelliten zwei und drei.

$$\begin{aligned} 40x_{\text{Anw}} + 0y_{\text{Anw}} - 4t_{\text{Anw}} - 192 &= 0 \\ \rightarrow 40x_{\text{Anw}} &= 4t_{\text{Anw}} + 192 = 0 \\ \rightarrow x_{\text{Anw}} &= \frac{1}{10}t_{\text{Anw}} + \frac{48}{10} \end{aligned} \quad (16)$$

Ersetzt man in der Formel (15) das x durch die Gleichung in (16) ergibt sich:

$$\begin{aligned} 18\left(\frac{1}{10}t_{\text{Anw}} + \frac{48}{10}\right) - 10y_{\text{Anw}} + 8t_{\text{Anw}} - 56 &= 0 \\ \frac{18}{10}t_{\text{Anw}} + \frac{864}{10} - 10y_{\text{Anw}} + 8t_{\text{Anw}} - 56 &= 0 \\ \frac{98}{10}t_{\text{Anw}} + \frac{304}{10} - 10y_{\text{Anw}} &= 0 \\ \rightarrow y_{\text{Anw}} &= \frac{98}{100}t_{\text{Anw}} + \frac{304}{100} \end{aligned} \quad (17)$$

Jetzt setzen wir als nächsten Schritt die Formeln (16) und (17) in die Formel mit der Nummer (10). Zusätzlich werden auch die Satellitenwerte von dem ersten Satelliten eingetragen. Außerdem wird die Geschwindigkeit eingefügt. Jetzt haben wir ein Gleichungssystem mit nur noch einer Unbekannten.

$$(x_{S1} - x_{Anw})^2 + (y_{S1} - y_{Anw})^2 - c^2 (t_{S1} - t_{Anw})^2 = 0$$

$$\left(5 - \frac{1}{10} t_{Anw} - \frac{48}{10}\right)^2 + \left(10 - \frac{98}{100} t_{Anw} - \frac{304}{100}\right)^2 - 1^2 (-3 - t_{Anw})^2 = 0$$

$$\left(\frac{2}{10} - \frac{1}{10} t_{Anw}\right)^2 + \left(\frac{696}{100} - \frac{98}{100} t_{Anw}\right)^2 - (-3 - t_{Anw})^2 = 0$$

$$\frac{4}{100} - \frac{4}{100} t_{Anw} + \frac{1}{100} t_{Anw}^2 + \frac{484416}{10000} - \frac{136416}{10000} t_{Anw} + \frac{9604}{10000} t_{Anw}^2 - 9 - 6 t_{Anw} - t_{Anw}^2 = 0$$

$$-\frac{296}{10000} t_{Anw}^2 + \frac{76816}{1000} t_{Anw} + \frac{394816}{10000} = 0$$

Jetzt erkennt man, dass man am besten mit der abc-Formel, bzw. Mitternachtsformel weitermacht. Es kommen jedoch sehr krumme Zahlen als Ergebnis heraus, und zwar -36.80187263 und +122.1134452. Wir sehen also, wie man die Unbekannte t_{Anw} herausbekommt. Mit Gleichung 16 und 17 können wir nun x_{Anw} und y_{Anw} berechnen²⁸.

5 Alternative Satellitennavigationssysteme

GPS ist das bekannteste Satellitensystem, es gibt jedoch noch weitere weltumspannende Systeme (GNSS – Global Navigation Satellite System, Globales Satellitennavigationssystem²⁹). GLONASS ist vom russischen Militär und Baidou ein GNSS vom chinesischem. Die EU hat auch ein Satellitensystem – Galileo. Dieses ist im Moment noch im Aufbau. Jedoch bietet Galileo einige Vorteile. Im Gegenzug zu allen anderen GNSS ist Galileo unter ziviler Kontrolle. Zudem ist es präziser als beispielsweise GPS. Galileo hat bei einer ein-Frequenzmessung eine Genauigkeit von ca. 8m. Bei einer zwei-Frequenzmessung liegt die Genauigkeit bei einem Meter bis wenige Zentimeter. GPS hat nur eine Präzision von ca. 10 m. Bis auf die Anzahl der Frequenzen bleibt das Grundprinzip gleich. Außerdem arbeitet Galileo nicht direkt gegen GPS, sondern man kann genauso die Satellitenkonstellationen kombinieren und eine noch höhere Präzision erreichen³⁰.

6 Anwendungsbeispiele

Wie schon erwähnt, ist GPS sehr vielseitig einsetzbar.

Beispielsweise wird GPS im Flugverkehr angewendet. Hier wird GPS als zusätzliche Sicherheit zu weiteren Systemen verwendet.

²⁸ Vgl. hans-riegel-fachpreise-seminararbeit-vwa-2014-koch.pdf, Stand 25.08.2023, S. 5

²⁹ Vgl. Albrecht, 2022, S. 24

³⁰ Vgl. ulbox, Stand: 23.08.2023, S. 59

Auch bei Geocaching ist GPS nützlich, da hier eine hohe Präzision notwendig ist, um sein Ziel zu finden.

Aber natürlich wird GPS auch im Schiffsbetrieb verwendet. Geschichtlich begann es hier im Jahre 1993. Dort wurde GPS offiziell die vorläufige Bereitschaft anerkannt. Damit wurde GPS bei der US Coast Guard als Navigationsmittel zugelassen. Zudem war es schließlich auch ausrüstungspflichtig für Schiffe, welche in der USA einen Hafen anlaufen wollten ³¹.

7 Fazit

Wie wir gesehen haben, steckt hinter dem Kürzel ‚GPS‘ viel mehr, als man auf den ersten Blick vermuten würde. Dennoch gibt es noch viel zu entdecken, da hier nur ein kleiner Teil der Wissenslücke geschlossen wurde. Wir wissen nun, dass GPS zu militärischen Zwecken entwickelt wurde und es erst später unser heutiges GPS entstand. Zudem kennen wir jetzt die Tricks, um die Zeitverschiebung zwischen GPS-Zeit und der Uhrzeit des Empfängers zu umgehen. Deswegen benötigt man schließlich die vier verschiedenen Satelliten zu einer Ortsbestimmung. Zukünftig wird das GPS mehr Konkurrenz bekommen und wie weit es beispielsweise Galileo noch bringt, werden wir mit der Zeit sehen.

³¹ Vgl. Kumm, 1993, S. 27

Literaturverzeichnis

Albrecht, Helmut: *Geometrie und GPS Mathematische, physikalische und technische Grundlagen der Satellitenortung verständlich erklärt*. Springer-Verlag, Berlin, 2022

Deutsches Spionagemuseum: <https://www.deutsches-spionagemuseum.de/2017/10/04/eine-zeitenwende-der-spionagegeschichte-vor-60-jahren-startete-sputnik-1#:~:text=Die%20%E2%80%9EZenit%E2%80%9C%2DSatelliten%20der,und%20dann%20eingesammelt%20werden%20mussten> [Stand: 13.08.2023]

ETH Zürich: <https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/dual/educeth-dam/documents/Unterrichtsmaterialien/technik-in-der-Allgemeinbildung/gps/gps-090129.pdf> [Stand 14.08.2023]

hans-riegel-fachpreise-seminararbeit-vwa-2014-koch.pdf:
<https://www.hans-riegel-fachpreise.com/fileadmin/hans-riegel-fachpreise/Module/ausgezeichnete-arbeiten/hans-riegel-fachpreise-seminararbeit-vwa-2014-koch.pdf> [Stand: 25.08.2023]

Kumm, Werner: *GPS Global Positioning System*; Delius Klasing Verlag, Bielefeld 1993

RedaktionErde: *Außerirdischer Wegweiser: Wie funktioniert GPS-Technik?*. <https://www.youtube.com/watch?v=u0cmsCVonSQ> [Stand: 18.08.2023]

Schmidt, Olaf: *Elektronische Navigation*. In: Deutscher Hochseesportverband „Hansa“ e.V.: *Seemannschaft Handbuch für den Yachtsport*. Delius Klasing Verlag, Bielefeld 2019

Ublox: *User's Guide GPS und GNSS: Grundlagen der Ortung und Navigation mit Satelliten*.
https://www.zogg-jm.ch/Dateien/Update_Zogg_Deutsche_Version_Jan_09_Version_Z4x.pdf#page=105&zoom=100,72,325 [Stand:23.08.2023]

Abbildungsverzeichnis

Katharinen Gymnasium: *Global Navigation Satellite Systems, Orbits - einer reicht nicht*.
<https://www.katharinengymnasium.de/wolf/web/gps/gps4Orbits.html>
[stand: 21.08.2023]

RedaktionErde: *Außerirdischer Wegweiser: Wie funktioniert GPS-Technik?*. <https://www.youtube.com/watch?v=u0cmsCVonSQ> , [Stand: 18.08.2023]

Ublox: *User's Guide GPS und GNSS: Grundlagen der Ortung und Navigation mit Satelliten*.
https://www.zogg-jm.ch/Dateien/Update_Zogg_Deutsche_Version_Jan_09_Version_Z4x.pdf#page=105&zoom=100,72,325 [Stand:23.08.2023]

Versicherung der selbstständigen Erarbeitung und Anfertigung der Facharbeit

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt aus anderen Werken (auch aus dem Internet) entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Heidelberg, den 13.09.2023

Unterschrift Schüler (in) Karla Wagner